Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Buenos Aires

SEMINARIO UNIVERSITARIO 2025

SEGUNDO PARCIAL - 07/03/2025

Apellido y Nombre: ....

Número de Documento: .... Especialidad ....

TEMA 6

1	2		3		4		5	NOTA

- La duración del examen es de 150 minutos.
- Condición mínima de aprobación (6 puntos): 50% del examen bien resuelto.
- El examen no puede estar resuelto en lápiz.
- Todas las respuestas deben estar justificadas.

FÓRMULAS: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) \pm \cos(x)\operatorname{sen}(y)$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$$

EJERCICIO 1: Sean las funciones

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1} \quad \text{y} \quad g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = 1 + \cos x.$$

Determinar la función $f \circ g$ indicando su dominio.

EJERCICIO 2: Sea $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to Im_f \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3 - 2\sqrt{x^2 - 9}$. Se pide:

(a) Determinar el dominio más amplio posible de f.

(b) Restringir el dominio de f para que admita inversa. Calcular la inversa de f y dar su dominio y conjunto imagen.

(resuelto por Sylvina)

EJERCICIO 3: Dados los vectores $\vec{v} = (2, 6)$, $\vec{w} = (-5, 3)$ y $\vec{u} = (-4, -4)$, se pide:

(a) Determinar para qué valores reales de α y β se tiene que

$$\alpha\,\vec{v} + \beta\,\vec{w} = \vec{u}.$$

(b) Determinar un vector $\vec{x}$ que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{v} - \vec{w}$ y que el módulo de $\vec{x}$ sea igual a 3.

EJERCICIO 4:

(a) Determinar todas las soluciones de la ecuación

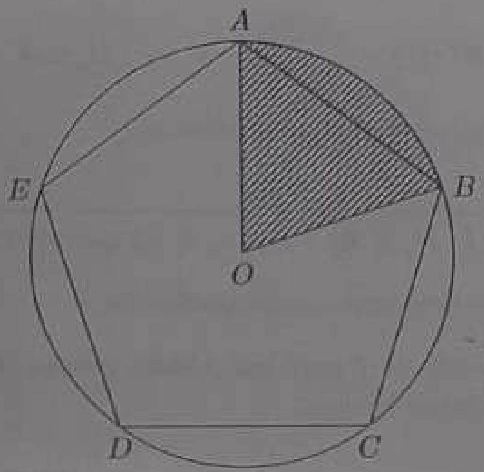
$$3\cos(2x) - 7\cos(x) = 2$$

en el intervalo $[0,\, 2\pi]$.

(b) Resolver la siguiente ecuación:

$$3 \cdot 3^{2x} + \frac{2}{3} \cdot 3^{x+1} = 1$$

EJERCICIO 5: El pentágono regular $ABCDE$ está inscripto en una circunferencia de centro en O. Sabiendo que el área del sector AOB es de $22,61\,cm^2$, calcular el perímetro del pentágono.



UTN	2º parcial	Tema 6	HOJA Nº 1/2
	Ingreso	T.N	FECHA 7-3-25

$\boxed{\text{EJ 1}}$ Sean las funciones:

$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-1}$ y $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = 1+\cos(x)$

Determinar la función $f \circ g$ indicando su dominio

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = f_{(1+\cos(x))} = \frac{(1+\cos(x))^2 - 2(1+\cos(x))}{\cancel{1} + \cos(x) - \cancel{1}} =$$

$$= \frac{1+\cancel{2\cos(x)}+\cos^2(x) - 2 - \cancel{2\cos(x)}}{\cos(x)} = \frac{\cos^2(x)-1}{\underbrace{\cos(x)}_{\neq 0}}$$

$$\boxed{f\circ g(x) = \frac{\cos^2(x)-1}{\cos(x)}}$$

$\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

$$\boxed{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{Dom(f\circ g) = \mathbb{R} - \left\{x \,/\, x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}}$$

$\boxed{\text{EJ 2}}$ Sea $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to Im f \subseteq \mathbb{R} \,/\, f(x) = 3 - 2\sqrt{x^2-9}$

$\to Im(f) = (-\infty, 3]$

Se pide:

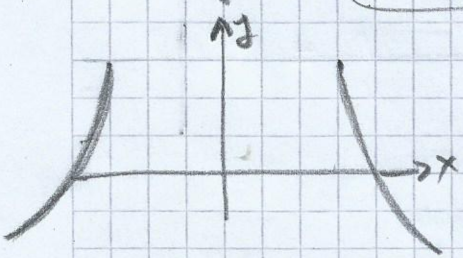
a) Determinar el dominio más amplio posible de f

$f(x)$ tiene $\sqrt{x^2-9} \Rightarrow x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 9 \to |x| \geq 3 \to \boxed{x \geq 3 \ \vee\ x \leq -3}$

$$\boxed{Dom(f) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)} = Im(f^{-1})$$

b) Restringir el dominio de f para que admita inversa. Calcular la inversa de f y dar su dominio y conjunto imagen

Restringo: $\boxed{Dom(f) = [3, +\infty)}$ $\quad x \geq 0$



$$y = 3 - 2\sqrt{x^2-9}$$

$$2\sqrt{x^2-9} = 3 - y$$

$$\sqrt{x^2-9} = \frac{3-y}{2}$$

$$\frac{3-y}{2} \geq 0$$

$$3 - y \geq 0$$

$$\boxed{3 \geq y} \to \boxed{Im(f) = (-\infty, 3]}$$

$$x^2 - 9 = \left(\frac{3-y}{2}\right)^2$$

$$x^2 = \frac{(3-y)^2}{4} + 9$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\sqrt{(3-y)^2 + 36}}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(3-x)^2 + 36}}$$

Df!

NOTA

EJ 3 Dados los vectores $\vec{v} = (2,6)$, $\vec{w} = (-5,3)$ y $\vec{u} = (-4,-4)$
Se pide:

a) Determinar para qué valores reales de α y β se tiene que:

$$\boxed{\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} = \vec{u}}$$

$$\alpha(2,6) + \beta(-5,3) = (2\alpha, 6\alpha) + (-5\beta, 3\beta) =$$

$$= (2\alpha - 5\beta, 6\alpha + 3\beta) = (-4,-4)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 5\beta = -4 \\ 6\alpha + 3\beta = -4 \end{cases} \longrightarrow 2\alpha - 5\beta = 6\alpha + 3\beta$$

$$2\alpha - 6\alpha = 3\beta + 5\beta$$

$$-4\alpha = 8\beta \rightarrow \boxed{\alpha = -2\beta}$$

$$\boxed{S = \{\beta \in \mathbb{R}, \alpha = -2\beta\}}$$

b) Determinar un vector $\vec{x}$ que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{v} - \vec{w}$ y que el módulo de $\vec{x}$ sea igual a 3

$$\vec{v} - \vec{w} = (2,6) - (-5,3) = \boxed{(7,3) = \vec{v} - \vec{w}}$$

$$\vec{x} = k(7,3) \qquad k+$$

$$|\vec{x}| = k\sqrt{7^2+3^2} = k\sqrt{58} = 3$$

$$k = \frac{3}{\sqrt{58}}$$

$$\vec{x} = \frac{3}{\sqrt{58}}(7,3)$$

$$\boxed{\vec{x} = \left(\frac{21}{\sqrt{58}}, \frac{9}{\sqrt{58}}\right)}$$

NOTA

UTN	2° parcial Ingreso	tema 6 TN	HOJA N° 2/2 FECHA 7-3-25

[EJ. 4] a) Determinar todas las soluciones de ecuación:

$$3\cos(2x) - 7\cos(x) = 2 \quad \text{en } [0, 2\pi]$$

$$3(\cos^2(x) - \text{sen}^2(x)) - 7\cos(x) = 2$$

$$3\cos^2(x) - 3\,\text{sen}^2(x) - 7\cos(x) = 2$$

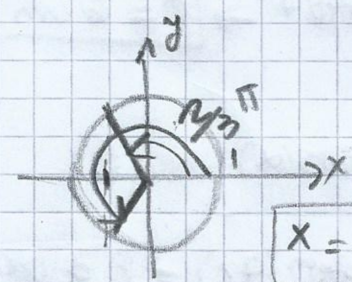
$$3\cos^2(x) - 3(1 - \cos^2(x)) - 7\cos(x) = 2$$

$$3\cos^2(x) - 3 + 3\cos^2(x) - 7\cos(x) - 2 = 0$$

$$6\cos^2(x) - 7\cos(x) - 5 = 0$$

$z = \cos(x) \longrightarrow 6z^2 - 7z - 5 = 0$

$\cancel{z_1 = \frac{5}{3} > 1}$ $\qquad z_2 = -\frac{1}{2}$



$\cos(x) = -\frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi}$

$\boxed{x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi}$

$$\boxed{S = \left\{ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi \right\}}$$

b) Resolver la sig. ecuación:

$$3 \cdot 3^{2x} + \frac{2}{3}\, 3^{x+1} = 1$$

$$3 \cdot (3^x)^2 + \frac{2}{\cancel{3}}\, 3^x \cdot \cancel{3} = 1$$

$$3 \cdot (3^x)^2 + 2 \cdot 3^x - 1 = 0$$

$z = 3^x$, $z \geq 0 \longrightarrow 3z^2 + 2z - 1 = 0$ $\qquad z_1 = 1/3$, $\cancel{z_2 = -1}$

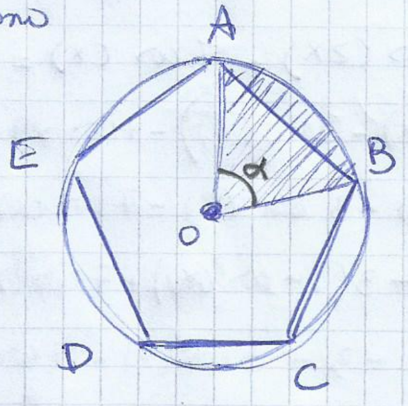
$$3^x = \frac{1}{3} = 3^{-1} \rightarrow \boxed{x = -1}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

EJ. 5 | El pentágono regular ABCDE está inscripto en una circunferencia de centro en O

Sabiendo que el área del sector AOB es de 22,61 cm^2, calcular el perímetro del pentágono



$$5\alpha = 360^\circ$$

$$\boxed{\alpha = 72^\circ}$$

Área $= \dfrac{\pi . r^2}{5} = 22{,}61\,cm^2 \longrightarrow r^2 = \dfrac{22{,}61\,cm^2 \times 5}{\pi}$

es un pentágono

$$r = 5{,}9987 \rightarrow \boxed{r \cong 6\,cm}$$

$$l^2 = r^2 + r^2 + r.r.\cos(\alpha)$$

$$l^2 = 36 + 36 + 36\cos(72) = 83{,}1246\,cm^2$$

$$l = 9{,}11726\,cm$$

$$\text{Perim} = 5l = 5 \times 9{,}11726\,cm = 45{,}586\,cm$$

$$\boxed{\text{Per.} = 45{,}59\,cm}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)